www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

CONCOURS D'ADMISSION A L'E.S.M. DE SAINT-CYR EN 1989

CONCOURS SCIENCES

MATHÉMATIQUES I

Options M, P, T, TA

Durée : 4 heures

Calculatrices électroniques autorisées

Le sujet proposé comprend trois parties.

— les candidats devront traiter le sujet *en entier;*

— il sera fourni une feuille de papier millimétré à chaque candidat.

Dans tout le problème :

n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2 .

$\mathbb{R}$ est le corps des nombres réels.

$M_n(\mathbb{R})$ est l'espace des matrices carrées, à coefficients réels, à n lignes et n colonnes.

Si A est une matrice à coefficients réels, non nécessairement carrée $\widetilde{A}$ désigne sa transposée.

Quand cela sera nécessaire, on identifiera $\mathbb{R}^n$ à l'ensemble des matrices à n lignes et une colonne.

Ainsi tout élément X de $\mathbb{R}^n$ pourra être représenté par :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

où, pour tout i élément de $\{1, 2, \ldots n\}$, x_i est réel.

Pour un tel vecteur X , le symbole $\|X\|$ représente le réel défini par $\|X\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$

Le but du problème est l'étude d'une matrice H de $M_n(\mathbb{R})$, dont la signification géométrique apparaîtra à la fin de l'énoncé, et appelée matrice de Hilbert; cette matrice est définie par :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \ldots\ldots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \ldots\ldots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$$

H est donc une matrice symétrique réelle de taille n, c'est-à-dire à n lignes et n colonnes.

I

1) Montrer, en le justifiant, que H a toutes ses valeurs propres réelles.

2) Soit X un élément de $\mathbb{R}^n$. On note : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

et soit $q(X)$ le réel défini par : $q(X) = \widetilde{X} H X$.

a) Vérifier la relation suivante : $q(X) = \int_0^1 (x_1 + tx_2 + \ldots + t^{n-1}x_n)^2 \, dt$

b) En déduire :

(i) H a toutes ses valeurs propres strictement positives.

(ii) H est inversible.

c) H^{-1} désigne l'inverse de H . Montrer :

$\widetilde{X}\ H^{-1} X$ est un réel positif, qui est nul si et seulement si X est le vecteur nul.

Dans la suite du problème, α_n et β_n représentent respectivement la plus petite et la plus grande des valeurs propres de la matrice H , de taille n .

3) Dans cette question, n est égal à 2 .

a) déterminer les réels α_2 et β_2 .

b) Soit E le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Si M est un point de E , de coordonnées x et y dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, c'est-à-dire vérifiant :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

écrire la condition nécessaire et suffisante pour que le point M soit tel que :

$$(*) \quad \widetilde{X} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} X = 1 \qquad \text{où } X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\mathscr{E}$ désignant l'ensemble des points vérifiant la relation (*) , reconnaître la nature de $\mathscr{E}$ et préciser l'interprétation géométrique des nombres α_2 et β_2 .

Représenter avec grand soin l'ensemble $\mathscr{E}$ dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ [unité graphique : 2 cm].

4) *a.* Justifier, pour tout élément X de $\mathbb{R}^n$, les inégalités suivantes :

$$\alpha_n \|X\|^2 \leqslant q(X) \leqslant \beta_n \|X\|^2$$

b) Montrer que la somme des valeurs propres de la matrice H est égale à :

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2i-1}$$

et en déduire :

$$n\alpha_n \leqslant 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}$$

c) Log désigne ici la fonction logarithme népérien, N est un entier supérieur ou égal à 2 .

Montrer les inégalités

$$\text{Log}(N+1) < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N} < 1 + \text{Log}\, N$$

En déduire alors l'inégalité :

$$n\alpha_n < \frac{1}{2} \text{Log}\, n + (1 + \text{Log}\, 2)$$

T.S.V.P.

5) On se propose, dans cette question, d'améliorer la majoration précédente.

a) A cet effet, on note H' l'élément de $M_{n-1}(\mathbb{R})$ défini par :

$$H' = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots\cdots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & & \frac{1}{n} \\ \vdots & & & \\ \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n} & \cdots\cdots & \frac{1}{2n-3} \end{pmatrix}$$

Justifier le fait que H' est inversible.

H'^{-1} désignera l'inverse de H'.

Ainsi, on a, en écrivant la matrice H par blocs :

$$H = \left(\begin{array}{c|c} H' & T \\ \hline {}^{t}T & \frac{1}{2n-1} \end{array}\right)$$

où : T est l'élément de $\mathbb{R}^{n-1}$ défini par :

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n+1} \\ \vdots \\ \frac{1}{2n-2} \end{pmatrix}$$

Soit Y un vecteur de $\mathbb{R}^{n-1}$; on note :

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

Soit λ un réel non nul.

Soit P l'élément de $M_n(\mathbb{R})$ défini par :

$$P = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 \cdots 0 & & \\ 0 & & 0 & Y \\ 0 \cdots 0 & & 1 & \\ \hline 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 & \lambda \end{array}\right)$$

Vérifier que le produit ${}^{t}P\,H\,P$ est égal à :

$${}^{t}P\,H\,P = \left(\begin{array}{c|c} H' & Z \\ \hline {}^{t}Z & \mu \end{array}\right)$$

où μ est le réel défini par :

$$\mu = {}^{t}Y\,H'\,Y + \lambda\,{}^{t}Y\,T + \lambda\,{}^{t}T\,Y + \frac{\lambda^2}{2n-1}$$

et où Z est le vecteur de $\mathbb{R}^{n-1}$ défini par :

$$Z = H'Y + \lambda T .$$

En déduire :

$$det\ H = det\ H'.\left(\frac{1}{2n-1} - \widetilde{T}\ H'^{-1}\ T\right)$$

où *det* H (*resp det* H') désigne le déterminant de H (*resp* de H')

On choisira, λ étant supposé donné, judicieusement le vecteur Y .

Déduire de ce qui précède :

$$det\ H \leqslant \frac{2^n.n\,!}{(2n)\,!}$$

b) Soit $(v_m)_{m \geqslant 1}$ la suite de réels définie, pour tout entier naturel non nul m, par :

$$v_m = 2m\sqrt[m]{\frac{m\,!}{(2m)\,!}}$$

En exprimant avec soin le logarithme népérien de v_m, montrer :

$\lim\limits_{m \to +\infty} v_m = \frac{e}{2}$ (e désigne la base des logarithmes népériens).

En déduire alors :

Il existe un réel K strictement positif tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on ait :

$$\alpha_n \leqslant \frac{K}{n}$$

(on ne demande pas de déterminer explicitement K)

II

On se propose, dans cette partie, de trouver un majorant de β_n.

1) Soit A un élément de $M_n(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

a. On suppose qu'il existe un élément X de $\mathbb{R}^n$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, tel que :

(i) X n'est pas nul
(ii) $AX = 0$
(iii) $Sup\ \{|x_i|, i \in \{1, 2, \ldots n\}\} = 1$

Montrer, pour tout entier i élément de $\{1, 2, \ldots n\}$, que :

$$|a_{ii}|\ |x_i| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{j=n} |a_{ij}|\ |x_j|$$

En déduire qu'il existe un entier i de $\{1, 2, \ldots n\}$ tel que :

$$|a_{ii}| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{j=n} |a_{ij}|$$

T.S.V.P.

b. Déduire de ce qui précède que si A , élément de $M_n(\mathbb{R})$, vérifie :

$$\forall\, i \in \{1, 2, \dots n\},\ |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{j=n} |a_{ij}|$$

alors A est inversible.

2) Déduire de la question précédente le résultat suivant :

si λ est une valeur propre de H , alors il existe un entier i de $\{1, 2, \dots n\}$ vérifiant :

$$\left|\lambda - \frac{1}{2i-1}\right| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{j=n} \frac{1}{i+j-1}$$

Montrer alors l'inégalité pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$\beta_n < 1 + \operatorname{Log} n$$

3) On désigne par w_n la trace du carré de la matrice H .

a) Vérifier l'égalité :

$$w_n = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} \frac{1}{(i+j-1)^2}$$

En déduire :

$$w_n \leqslant 2 + \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right) - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right)$$

En utilisant ce qui précède, établir le résultat suivant :

il existe un réel K' strictement positif tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 , on ait :

$$\beta_n \leqslant K' \sqrt{\operatorname{Log} n}$$

III

Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, donnée. On désigne par F l'espace vectoriel des fonctions polynômes, définies de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, de degré inférieur ou égal à $n-1$.

A la fonction f on associe la suite des réels $(b_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall\, p \geqslant 1,\ b_p = \int_0^1 x^{p-1} f(x)\, dx$$

On désigne par B le vecteur de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Enfin, on désigne par U_0 l'unique élément de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$HU_0 = B$$

1) Soit U un vecteur de $\mathbb{R}^n$:

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

et soit Q l'élément de F défini pour tout réel x de l'intervalle [0, 1] par :

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{i=n} u_i \, x^{(i-1)}$$

Montrer que :

$$\int_0^1 \left(Q(t) - f(t) \right)^2 dt = \widetilde{U} H U - 2 \widetilde{U}.B + \int_0^1 f^2(t)\, dt$$

2) Soit g l'application de F dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(Q) = \int_0^1 \left(Q(t) - f(t) \right)^2 dt, \text{ pour tout } Q \text{ de } F.$$

Déduire de ce qui précède :

il existe un et un seul élément Q_0 de F en lequel g atteint son minimum.

Exprimer Q_0 à l'aide des coordonnées du vecteur U_0.

(on pourra poser $U = U_0 + V$).

3) Dans cette question, n vaut 2 et f désigne la fonction :

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R}$$
$$x \to f(x) = x^2$$

Déterminer explicitement Q_0 et le minimum de g dans ce cas.

4) Montrer que si on suppose :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \; b_p = 0$$

alors on a :

$$\forall x \in [0, 1[, \; \int_0^1 \frac{f(t)}{1 - tx} \, dt = 0$$

5) On suppose, dans cette question, que f est positive.

Exprimer, pour N entier naturel non nul donné, à l'aide d'une intégrale, la somme :

$$\sum_{p=1}^{p=N} b_p$$

En déduire l'équivalence des deux propositions suivantes :

(i) $\sum_{p=1}^{+\infty} b_p$ converge

(ii) $\int_0^1 \frac{f(t)}{1-t} \, dt$ converge

Montrer enfin que si :

$$\int_0^1 \frac{f(t)}{1-t} \, dt \text{ converge,}$$

alors on a :

$$\int_0^1 \frac{f(t)}{1-t} \, dt = \sum_{p=1}^{+\infty} b_p$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail